PART3　交点の位置ベクトル（係数の和が 1）

例題

△ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする。

また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC において，辺 AB，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FE を求めよ。

第12講　PART3 確認問題

$\triangle$ABC において，辺 BC を $2:1$ に内分する点を D，辺 AC の中点を E とする。また, 線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

1 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表すと

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AC}$$

である。

2 $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表すと

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{AC}\ \text{であり,}$$

$$\text{BF}:\text{FE}=\boxed{サ}:\boxed{シ},$$

$$\text{AF}:\text{FD}=\boxed{ス}:\boxed{セ}$$

である。

PART3　交点の位置ベクトル（係数の和が 1）

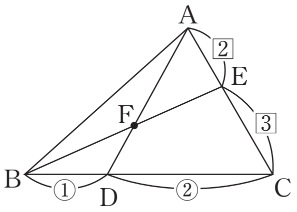
例題

△ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする。

また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

(2)　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$（$k$ は実数）…… ① とおくと，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AE}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots ②$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}k\overrightarrow{AE} \quad \cdots\cdots ③$$

点 F は線分 BE 上の点であるから

$$\frac{2}{3}k+\frac{5}{6}k=1 \qquad k=\frac{2}{3}$$

よって，②より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$$

また，③より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AE}$ であるから

BF：FE＝5：4

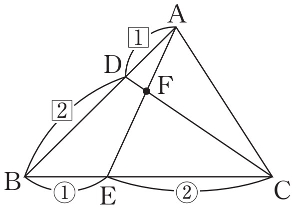
①より $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ であるから AF：FD＝2：1

練習

△ABC において，辺 AB，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FE を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(2)　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$（$k$ は実数）…… ①とおくと，　$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC} \text{ …… ②}$$

$$=2k\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC} \text{ …… ③}$$

点 F は線分 CD 上の点であるから　$2k+\dfrac{1}{3}k=1$　　$k=\dfrac{3}{7}$

よって，②より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

また，③より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{6}{7}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$ であるから　DF：FC＝1：6

①より，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AE}$ であるから　AF：FE＝3：4

第 12 講　PART3 確認問題 解答

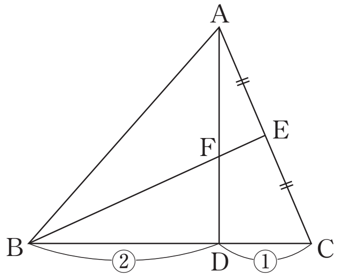
1 **[正解]** ア：1，イ：3，ウ：2，エ：3，オ：1，カ：2

[解説]

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1\times\overrightarrow{AB}+2\times\overrightarrow{AC}}{2+1}$$ [A]

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



[A]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

2 **[正解]** キ：1，ク：5，ケ：2，コ：5，サ：4，シ：1，
ス：3，セ：2

[解説]

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$（$k$ は実数）　……①とおくと，

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots②$$

$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}k\overrightarrow{AE}\quad\cdots\cdots③$$

点 F は線分 BE 上の点であるから，

$$\frac{1}{3}k+\frac{4}{3}k=1$$ [B]

$$k=\frac{3}{5}$$

よって，②より　$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

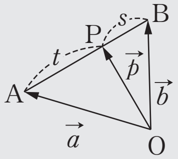
③より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AE}$ であるから

BF：FE＝4：1 [B]

①より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ であるから

AF：FD＝3：2

[B]　点 P が直線 AB 上の点
$\iff$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$



$0<s<1$，$0<t<1$ のとき，
AP：PB＝t：s